



I Jornadas de Análisis Input-Output. Oviedo, 22 y 23 de Septiembre de 2005

**ANÁLISIS ESTRUCTURAL A TRAVÉS DE UN ENFOQUE
PRETOPOLÓGICO Y DEL PROGRAMA RESO. APLICACIÓN A UNA
TABLA INPUT-OUTPUT.**

Solís Arias, Valentín

Universidad Nacional Autónoma de México.

García Pérez, María Emilia

Universidad de Castilla – La Mancha.



www.iogroup.org



ANÁLISIS ESTRUCTURAL A TRAVÉS DE UN ENFOQUE PRETOPOLÓGICO Y DEL PROGRAMA RESO. APLICACIÓN A UNA TABLA INPUT-OUTPUT.

Solís Arias, Valentín

Universidad Nacional Autónoma de México.

García Pérez, María Emilia

Universidad de Castilla – La Mancha.

En este trabajo proponemos la aplicación de dos algoritmos basados en metodologías diferentes, que permiten estructurar los datos relacionales recogidos en una Tabla Input-Output pues dan lugar a la construcción de grupos de elementos interdependientes en un marco de análisis muy general. Con el primero de ellos, a partir del concepto de adherencia pretopológica, se generan subconjuntos cerrados y conjuntos cerrados mínimos cuya interrelación queda revelada de una manera muy clara. El segundo, incorporado en el programa RESO (REseaux SOciaux), permite descomponer el grafo asociado a la matriz de datos relacionales en subconjuntos de elementos que actúan entre sí y hacia adentro de cada componente conexa.

Es interesante notar que a través de la pretopología se constituyen aproximaciones teóricas y mediante algoritmos de la teoría de grafos, estimaciones numéricas. Además, en algunos casos, se producen los mismos

resultados y la información generada puede ser útil para la interpretación económica.

**ANÁLISIS ESTRUCTURAL A TRAVÉS DE UN ENFOQUE
PRETOPOLÓGICO Y DEL PROGRAMA RESO. APLICACIÓN A UNA
TABLA INPUT-OUTPUT.**

Valentín Solís Arias

Universidad Nacional Autónoma de México

valentinsolis@yahoo.com.mx

M^a Emilia García Pérez

Universidad de Castilla-La Mancha

Emi.Garcia@uclm.es

1.- INTRODUCCIÓN.

Para adoptar medidas de políticas económicas, sociales, o de otra naturaleza, es indispensable conocer qué actividades son susceptibles de propagar las consecuencias de esas transformaciones con mayor o menor rapidez, e incluso aquéllas en que la eficacia de dichas medidas pueda ser máxima. La difusión de dichos efectos por toda la estructura, tiene su origen, entre otros aspectos, en la existencia de relaciones de interdependencias y de dependencias entre los diferentes agentes que intervienen en el proceso.

Intuitivamente, las nociones de difusión y propagación están ligadas a las de entorno y proximidad, en el sentido de que la transmisión de cualquier perturbación que se produce en un conjunto (*whole*), es más rápida entre los elementos que estén más cercanos. Desde un punto de vista matemático, la Topología (del término inglés *Topology*) estudia las propiedades cualitativas y las posiciones de los entes, independientemente de su forma y de su tamaño. En este ámbito aparecen, entre otros, los conceptos clásicos de continuidad, que hace posible formalizar la transformación entre conjuntos de una misma estructura topológica; de compacidad, que, combinado con el anterior, contribuye a la búsqueda de puntos fijos u óptimos; y el de conexión, en el que nosotros nos centraremos, ya que permite modelar el concepto de *homogeneidad* de una parte de un conjunto dado.

Sin embargo, las condiciones implícitas en una estructura topológica¹ ó topología, a menudo son incompatibles con las situaciones reales en las que se quiere aplicar el concepto de proximidad². Este hecho nos conduce a fijar bases teóricas con supuestos menos rígidos, pero más adaptables a hechos más concretos y reales, que llamamos pretopologías o espacios pretopológicos.

Estas estructuras, en las que se pueden generalizar los conceptos básicos de la topología, tales como adherencia, interior, cierre o clausura, entorno, continuidad, compacidad y conexión, han proporcionado múltiples aplicaciones en el ámbito de las ciencias sociales. Por ejemplo³: el problema de la formación de coaliciones, si hablamos de la teoría de juegos; el concepto de *espacio preferenciado*, obtenido a partir de relaciones de preferencia que, al menos, son preordenes; o incluso, poder manejar conjuntos finitos sobre los que no es factible construir una métrica tradicional de estructuras de *entorno* o *proximidad*, excepto las que proporcionan topologías triviales.

Además, hasta hace poco tiempo, utilizar ciertas herramientas pretopológicas con conjuntos con un elevado número de elementos, era, desde un punto de vista práctico, bastante complicado. Sin embargo, esta circunstancia ya no es un problema, gracias al continuo desarrollo de hardware y software adecuados a las múltiples necesidades de cálculo y a la construcción de algoritmos adaptados de otras áreas. En concreto, proponemos aquí la aplicación de dos algoritmos que permiten estructurar los datos relacionales recogidos en una Tabla Input-Output (TIO, en adelante), resaltando la construcción de grupos de elementos interdependientes en un marco de análisis muy general.

El primero de ellos, incorporado en un programa llamado RESO (REseaux SOciaux) por su autora Monique Vincent-Dalud⁴, descompone el grafo asociado a la

¹ Kelley J. L. (1975).

² En García Pérez M. E. (1999), puede verse, por ejemplo, que si se quiere construir una estructura topológica inducida por una relación binaria, el axioma de que la adherencia de la adherencia de un subconjunto A debe coincidir con la adherencia de A, obliga a que la relación sea transitiva; condición que no se cumple en las relaciones de influencia y dominancia presentes en dicho trabajo.

³ Auray, J. P. y otros: "*La prétopologie: un outil mathématique de modélisation du concept de proximité dans le domaine des sciences sociales*". (Resumen de la conferencia). Quatrièmes Journées de la proximité.

⁴ Este enfoque de sociología matemática lo planteó en su tesis doctoral "*Modele prétopologique pour une méthodologie d'analyse de réseaux: concepts y algorithmes*". En ella realiza una crítica muy bien fundada de enfoques popularizados por los sociólogos norteamericanos que desarrollaron métodos de análisis de redes sociales (programas STRUCTURE ó UCINET), basados en la teoría de grafos, de forma que los elementos de una red son los que determinan su comportamiento y establecen su regularidad conductual. Así, la estructura aparece como restrictiva del comportamiento individual y en términos sociológicos, la conducta de los individuos aparece sobre-socializada. Sin embargo, esta autora propone que en conceptos más amplios y flexibles, las redes sociales deben ser vistas en una doble interacción: de los individuos

matriz de datos relacionales en componentes conexas, identificando diferentes “periferias” de cada componente, iterando hacia el centro del mismo. La descomposición de las componentes conexas (o fuertemente conexas) se basa, en el algoritmo RESO, en dos conceptos en la teoría de grafos : “punto de articulación” (un vértice de una componente conexa que si se remueve, desconecta la componente) y "punto frágil" (un vértice de un grafo que si se remueve, no desconecta la componente, simplemente disminuye su tamaño) . Cada periferia es una clase definida a través de un criterio de fragilidad de los vértices del componente, generando, como contrapartida, una componente conexa articulada por uno o varios puntos. El resultado final es una presentación del grafo en subconjuntos de elementos que interactúan entre sí y hacia adentro de cada subconjunto.

El segundo algoritmo, genera una estructura que clarifica relaciones entre elementos y grupos de elementos. A partir del concepto de pseudoclausura o de adherencia pretopológica, se aplica el operador que clausura a estos elementos y se generan subconjuntos cerrados y conjuntos cerrados mínimos, cuya interrelación queda revelada de una manera muy clara⁵.

Es interesante notar que en algunos ejercicios ambos algoritmos producen los mismos resultados, así como información útil para la interpretación económica. Además, un aspecto sobresaliente de estos algoritmos es que constituyen aproximaciones teóricas a través de la pretopología y estimaciones numéricas mediante algoritmos de la teoría de grafos. Esto se debe a que se puede probar que cierto tipo de pretopologías permiten formalizar todas las aplicaciones de la teoría de grafos, por lo que, por ejemplo, la estimación de una pseudoclausura de un conjunto de elementos puede hacerse a través del cierre transitivo de un conjunto de vértices del grafo asociado a esa pretopología.

entre sí y con el todo (estructura) y del todo con los individuos, para que se generen opciones individuales y colectivas, que en términos económicos, estaríamos hablando de incorporación de cambios tecnológicos.

⁵ La primera aproximación de este tipo de análisis se realizó en el capítulo 18 del libro “*Manuel de prétopologie et ses applications*” de Z. Belmandt (1993). Una versión más refinada fue presentada por C. Langeron y S. Bonnevey en su artículo “*A pretopological approach for structural analysis*”.

2.- DESARROLLO TEÓRICO: CONCEPTOS Y RESULTADOS.

Definición 1. Sea X un conjunto y sea $\wp(X)$, el conjunto de partes de X . Y sea una aplicación $a: \wp(X) \rightarrow \wp(X)$. Se dice que el par (X,a) es un *espacio pretopológico ó una pretopología* si se verifican las siguientes condiciones:

- i) $a(\emptyset) = \emptyset$
- ii) $\forall A \subset X$ se cumple que $A \subset a(A)$ (expansiva)

A la aplicación a se le denomina *pseudoclausura ó adherencia (pretopológica) de X* y al conjunto $a(A)$ *pseudoclausura de A* .

Definición 2. Un espacio pretopológico (X,a) es *de tipo V* si y solo si

$$\forall A,B \subset X / A \subset B \text{ entonces se cumple que } a(A) \subset a(B) \text{ (isotonía)}$$

Definición 3. Un espacio pretopológico (X,a) es *de tipo V_D* si y solo si

$$\forall A,B \subset X / A \subset B \text{ entonces se cumple que } a(A \cup B) = a(A) \cup a(B) \text{ (subaditiva)}$$

Definición 4. Un espacio pretopológico (X,a) es *de tipo V_S* si y solo si

$$\forall A \subset X \text{ se cumple que } a(A) = \cup \{a(x) / x \in A\} \text{ (aditiva)}$$

Definición 5. Sea $A \subset X$. Decimos que A es *cerrado* si y solo si $a(A) = A$ (idempotente). Y se llama *clausura o cierre de A* , y lo denotamos por $F(A)$, al menor subconjunto cerrado de X que contiene a A .

Un espacio pretopológico **finito**, isotónico y sub-aditivo, también es aditivo y en algunos tratados se le conoce como espacio de Alexandroff. Este espacio se usa en el manejo de procesos de imágenes digitales, semántica de lógica modal y otras aplicaciones. El espacio de Alexandroff constituye esencialmente un grafo dirigido.

Ejemplo:

Sea $X \neq \emptyset$ y sea \mathfrak{R} una relación binaria en X .

$\forall x \in X$, consideramos el conjunto $\mathfrak{R}(x)$ de todos los elementos con los que x está relacionados, es decir:

$$\mathfrak{R}(x) = \{ y \in X / x \mathfrak{R} y \}$$

Y consideramos el conjunto de los elementos relacionados con x , o sea:

$$\mathfrak{R}^{-1}(x) = \{ y \in X / y \mathfrak{R} x \}$$

En estas condiciones se pueden definir, entre otras, dos estructuras pretopológicas:

- La *pretopología de los descendientes*⁶, (X, a_d) , de forma que la adherencia de un subconjunto $A \subseteq X$, viene dada por:

$$a_d(A) = \{x \in X / \mathfrak{R}(x) \cap A \neq \emptyset\} \cup A$$

- La *pretopología de los ascendientes-descendientes*, (X, a_{ad}) , tal que la adherencia de cualquier subconjunto $A \subseteq X$, viene caracterizada como:

$$A_{ad}(A) = \{x \in X / \mathfrak{R}^{-1}(x) \cap A \neq \emptyset \text{ y } \mathfrak{R}(x) \cap A \neq \emptyset\} \cup A$$

Además, ocurre que la primera es de tipo V_S y la segunda es solo de tipo

V. Veámoslo con el siguiente ejemplo:

Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y sea \mathfrak{R} una relación binaria definida de forma que $x\mathfrak{R}y$ si y solo si existe el arco (x,y)

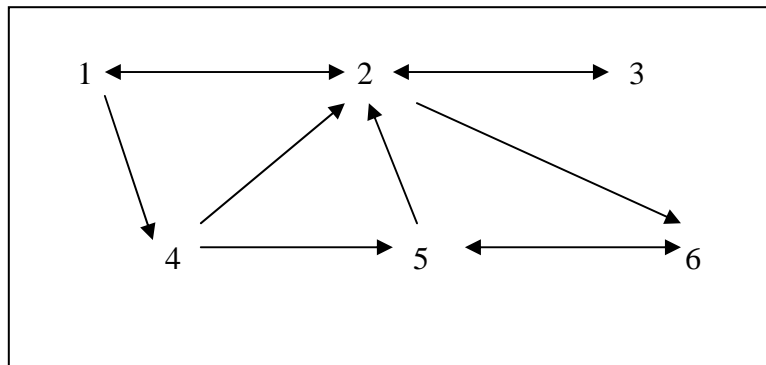


Figura 1

Calculamos $a_d(5) = \{2, 5, 6\}$ y $a_d(6) = \{5, 6\}$. Sea $A = \{5, 6\}$, entonces $a_d(A) = \{2, 5, 6\}$ e igual para cualquier otro subconjunto de X .

Por otro lado, $a_{ad}(5) = a_{ad}(6) = \{5, 6\}$ y sin embargo, $a_{ad}(\{5, 6\}) = \{2, 5, 6\}$, lo que indica que efectivamente no es de tipo V_S .

Además, se cumple que $a_{ad}(a_{ad}(A)) = \{1, 2, 3, 5, 6\} \neq a_{ad}(A)$.

Esta pretopología de los descendientes nos va a permitir formalizar conceptos y aplicaciones de la Teoría de Grafos. En particular, nos fijaremos en nociones de conexión, que a menudo son utilizadas en análisis de redes. Con ello conseguiremos un agrupamiento de los elementos en diferentes subconjuntos que actúan entre sí y hacia adentro de cada componente conexa. Por otro lado, vamos a ver que una pretopología de tipo V basada en una pseudoclausura, hará posible, no una partición o jerarquización de

⁶ Dalud-Vincent, M. y otros (2001).

los elementos de un conjunto; sino formular diferentes tipos de conexiones entre ellos o entre un subconjuntos de ellos.

2.1.- Primer enfoque. Pretopologías y Teoría de Grafos: componentes fuertemente conexas⁷.

Definición 6. Sea (X,a) un espacio pretopológico de tipo V . Decimos que (X,a) es *fuertemente conexo* si y solo si $\forall C \subset X, C \neq \emptyset$ se cumple que $F(C) = X$.

Definición 7. Sea (X,a) un espacio pretopológico de tipo V y sea $A \subset X$. Denotamos por F_A la función de clausura restringida sobre A de la clausura de (X,a) , es decir, $\forall A \subset X$ ocurre que $F_A(C) = F(C) \cap A$.

Sea $A \subset X, A \neq \emptyset$, decimos que A es un *subconjunto fuertemente conexo de (X,a)* si y solo si A dotado de la clausura de F_A es fuertemente conexo, es decir:

$$\forall C \subset A, C \neq \emptyset \text{ ocurre que } F(C) \cap A = A$$

Definición 8. Sea (X,a) un espacio pretopológico de tipo V y sea $A \subset X$. Se dice que A es una *componente fuertemente conexa de (X,a)* si y solo si A es un subconjunto fuertemente conexo de (X,a) y $\forall B, A \subset B \subset X$ con $A \neq B$, B no puede ser un subconjunto fuertemente conexo de X .

Proposición 1. Sea (X,a) un espacio pretopológico de tipo V . Entonces la familia de componentes fuertemente conexas de (X,a) es una partición de X .

Definición 9. Sea (X,a) un espacio pretopológico de tipo V y sea $A \subset X, A \neq \emptyset$. Se define la *pretopología inducida por a sobre A* , y denotamos por a_A , como sigue:

$$\forall A \subset X \text{ ocurre que } a_A(C) = a(C) \cap A$$

En estas condiciones, decimos que el par (A,a_A) es un *subespacio pretopológico de (X,a)* y denotamos por F_A^0 la clausura de a_A .

Definición 10. Sea (X,a) un espacio pretopológico de tipo V y sea $A \subset X, A \neq \emptyset$. Decimos que (A,a_A) es un *subespacio pretopológico fuertemente conexo de (X,a)* si y solo si (A,a_A) considerado como espacio pretopológico, es fuertemente conexo.

Proposición 2. Sea (X,a) un espacio pretopológico de tipo V y sea $A \subset X, A \neq \emptyset$. Si (A,a_A) es un subespacio fuertemente conexo de (X,a) , entonces A es un subconjunto fuertemente conexo de (X,a) .

⁷ Dalud-Vincent, M. y otros (2001).

Definición 11: Sea (X,a) un espacio pretopológico de tipo V y sea $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. Se dice que (A,a_A) es *el mayor subespacio pretopológico fuertemente conexo de (X,a)* si y solo si (A,a_A) es un subespacio fuertemente conexo de (X,a) y $\forall B$, $A \subset B \subset X$ con $A \neq B$, (B,a_B) no puede ser un subconjunto fuertemente conexo de (X,a) .

A partir de esta definición, los siguientes resultados nos van a permitir calcular las componentes fuertemente conexos y los mayores subespacios fuertemente conexos de un espacio pretopológico (X,a) :

Proposición 3. Sea (X,a) un espacio pretopológico de tipo V_S y sea $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. Entonces se cumple que:

A es una componente fuertemente conexa de (X,a) si y solo si A es el mayor subespacio fuertemente conexo de (X,a)

Proposición 4. Sea (X,a) un espacio pretopológico de tipo V . Entonces ocurre que la familia de los mayores subespacios fuertemente conexos de (X,a) , es una partición de X .

Proposición 5. Sea (X,a) un espacio pretopológico de tipo V y sea $\{ C_i / i \in I \}$ una familia de los subconjuntos fuertemente conexos de (X,a) , que es una partición de X .

Para cada $i \in I$, definimos $I_i = \{ k \in I / F(C_k) = F(C_i) \}$. Y así existe una subfamilia $J \subset I$ tal que $\{ I_j / j \in J \}$ es una partición de I .

Y para cada $j \in J$, construimos $F_j = \bigcup_{k \in I_j} C_k$. Entonces, se cumple que:

- i) La familia $\{ F_j / j \in J \}$ es una partición de X .
- ii) La familia $\{ F_j / j \in J \}$ es el conjunto de componentes fuertemente conexas de (X,a) .

Definición 12. Sea (X,a) un espacio pretopológico de tipo V y sean $A, B \subset X$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$. Se dice que existe un *camino en (X,a) de B a A* si y solo si $B \subset F(A)$.

Proposición 6. Sea (X,a) un espacio pretopológico de tipo V . Entonces ocurre que:

- i) (X,a) es fuertemente conexo si y solo si para cualesquiera subconjuntos A y B no vacíos de X , existe un camino de B a A en (X,a) .
- ii) (X,a) es fuertemente conexo si y solo si para cualesquiera $x,y \in X$, existe un camino de $\{y\}$ a $\{x\}$ en (X,a) .
- iii) Sea $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. A es un subconjunto fuertemente conexo de (X,a) si y solo si para cualesquiera $x,y \in A$, existe un camino de $\{y\}$ a $\{x\}$ en (X,a) .

Proposición 7. Sea (X,a) un espacio pretopológico de tipo V . Sea $\{ C_i / i \in I \}$ una familia de subconjuntos no vacíos de (X,a) tales que:

$$1. X = \bigcup_{i \in I} C_i$$

2. $\forall i \in I, \forall x, y \in C_i, \exists \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ elementos de X tales que $y = x_0, x = x_n$ de forma que $\forall j = 0, 1, \dots, n-1 \ x_{j+1} \in a(\{x_j\})$

3. $\forall i, k \in I, i \neq k \ \forall x \in C_i, \forall y \in C_k \ \neg \exists$ una secuencia $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de elementos de X tales que $y = x_0, x = x_n$ de forma que $\forall j = 0, 1, \dots, n-1 \ x_{j+1} \in a(\{x_j\})$ ó $\neg \exists$ una secuencia $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de elementos de X tales que $x = x_0, y = x_n$ de forma que $\forall j = 0, 1, \dots, n-1 \ x_{j+1} \in a(\{x_j\})$.

Entonces, se cumple que:

i) $\forall i \in I, C_i$ es un subespacio fuertemente conexo de (X,a) .

ii) $\{ C_i / i \in I \}$ es una partición de X .

Proposición 8. Sea (X,a) un espacio pretopológico de tipo V_S . Sea $\{ C_i / i \in I \}$ una familia de subconjuntos no vacíos de (X,a) tales que:

$$1. X = \bigcup_{i \in I} C_i$$

2. $\forall i \in I, \forall x, y \in C_i, \exists \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ elementos de X tales que $y = x_0, x = x_n$ de forma que $\forall j = 0, 1, \dots, n-1 \ x_{j+1} \in a(\{x_j\})$

3. $\forall i, k \in I, i \neq k \ \forall x \in C_i, \forall y \in C_k \ \neg \exists$ una secuencia $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de elementos de X tales que $y = x_0, x = x_n$ de forma que $\forall j = 0, 1, \dots, n-1 \ x_{j+1} \in a(\{x_j\})$ ó $\neg \exists$ una secuencia $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de elementos de X tales que $x = x_0, y = x_n$ de forma que $\forall j = 0, 1, \dots, n-1 \ x_{j+1} \in a(\{x_j\})$.

Entonces, se cumple que $\{ C_i / i \in I \}$ es el conjunto de componentes fuertemente conexas de (X,a) .

Proposición 9. Sea (X,a) un espacio pretopológico de tipo V y sean

$\{ C_i / i \in I \}$ una familia de los subconjuntos fuertemente conexos de (X,a)

$\{ F_j / j \in J \}$ la familia de componentes fuertemente conexas de (X,a)

$\{ E_k / k \in K \}$ la familia de los mayores subespacios fuertemente conexos de (X,a)

Entonces, se cumple que:

$$i) \ \forall k \in K \ \exists I_k \subset I \ \text{tal que} \ E_k = \bigcup_{i \in I_k} C_i$$

$$ii) \forall j \in J \exists K_j \subset K \text{ tal que } F_j = \bigcup_{k \in K_j} E_k$$

La estimación de esas familias de componentes y subconjuntos fuertemente conexos es la tarea que se propone resolver el programa informático RESO.

2.2.- Segundo enfoque. Pretopologías y análisis estructural: subconjuntos cerrados elementales y subconjuntos cerrados mínimos⁸.

En el artículo reseñado en la nota de pie de página, sus autores demuestran cómo es posible construir una estructura pretopológica en tres situaciones diferentes: cuando el conjunto está dotado de una métrica a partir de una distancia d , si existe una relación binaria y reflexiva entre sus elementos y , finalmente, si dicho conjunto forma parte de un dígrafo valuado.

En cualquiera de estas pretopologías, ocurre que la pseudoclausura no es idempotente, es decir, existe algún subconjunto $A \subset X$ tal que $a(a(A)) \neq a(A)$ ⁹. Esta propiedad sólo se verifica en los subconjuntos cerrados, y a ellos nos vamos a referir en este apartado.

Notación. Sea (X,a) un espacio pretopológico. Representamos por $\mathfrak{F}(X,a)$ la familia de conjuntos cerrados de X para la adherencia a , es decir:

$$\mathfrak{F}(X,a) = \{ F \subset X / a(F) = F \}$$

y sea $\mathfrak{F}(X,a)^* = \mathfrak{F}(X,a) - \{\emptyset\}$

Proposición 10. Sea (X,a) un espacio pretopológico de tipo V . Entonces la intersección de conjuntos cerrados de X es un conjunto cerrado de X .

Proposición 11. Sea (X,a) un espacio pretopológico de tipo V . Entonces cada subconjunto de X , y en particular los conjuntos unitarios, posee una clausura.

Definición 13. Sea (X,a) un espacio pretopológico de tipo V . Se llama *subconjunto cerrado elemental* y se denota como F_x , a la clausura de un conjunto unitario $\{x\}$ de X .

Notación. Sea (X,a) un espacio pretopológico de tipo V . El conjunto de subconjuntos cerrados elementales de X se representa por $\mathfrak{F}e(X,a)$, o sea:

$$\mathfrak{F}e(X,a) = \{ F_x, x \in X \}$$

Además, $\mathfrak{F}e(X,a) \subset \mathfrak{F}(X,a)^*$.

⁸ Largeron, C. y Bonnevey, S. (2002).

⁹ Recordemos que esa hipótesis es propia sólo de los espacios topológicos.

Proposición 12. Sea (X,a) un espacio pretopológico de tipo V . Entonces para cualesquiera dos subconjuntos cerrados elementales F_x, F_y de X , o bien su intersección es vacía, o bien si existe $z \in F_x \cap F_y$ ocurre que $F_z \subset F_x \cap F_y$.

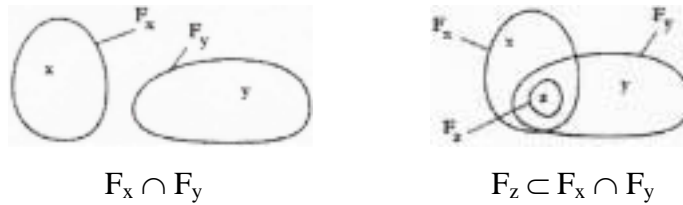


Figura 2

Definición 14. Sea (X,a) un espacio pretopológico de tipo V . Un subconjunto cerrado mínimo de X con respecto a a es un elemento de $\mathfrak{I}(X,a)^*$ que no puede contener a otro conjunto de $\mathfrak{I}(X,a)^*$. Sea $\mathfrak{I}m(X,a)$, el conjunto de los subconjuntos cerrados mínimos de X entonces:

$$\mathfrak{I}m(X,a) = \{ F \in \mathfrak{I}(X,a)^* / \neg (G \in \mathfrak{I}(X,a)^* - \{F\}, G \subset F) \}$$

Proposición 13. Sea (X,a) un espacio pretopológico de tipo V . Entonces se cumple que:
 $F \in \mathfrak{I}m(X,a) \Leftrightarrow F \in \mathfrak{I}e(X,a)$ y no contiene otro subconjunto cerrado elemental de X

Por tanto, la idea que subyace en este método es la de construir primero grupos homogéneos (subconjuntos cerrados mínimos) y luego aquellos que los contengan (subconjuntos cerrados elementales y no mínimos) hasta que se complete el análisis estructural de todos los elementos que forman el conjunto.

Desde el punto de vista algorítmico, el método de localización de los cerrados mínimos, se basa en el hecho de que éstos se encuentran incluidos siempre en los conjuntos cerrados elementales. La existencia de ambos está garantizada para conjuntos finitos.

3.- APLICACIÓN DE AMBOS ALGORITMOS A LA TABLA INPUT-OUTPUT DE ASTURIAS DE 2000.

3.1.- Base de datos.

La información que se emplea en este trabajo procede de la tabla input-output de Asturias para el año 2000. La TIO original se presenta a un nivel de agregación de 65

ramas; sin embargo, nosotros empleamos una agregación a 31 ramas para hacer más accesible y didáctico el manejo de los modelos empleados. La obtención de las 31 ramas se basa en el trabajo realizado por García Muñoz, A. S. et al (2003) en el que desarrollan medidas que informan las pérdidas de información que implica su agregación.

La TIO se normalizó por filas, obteniéndose lo que se conoce como la matriz de coeficientes de distribución.

3.2.- Umbrales y filtros.

La introducción de datos en los dos modelos empleados requirió obtener una matriz adyacente a la de coeficientes de distribución binarizándolos a un determinado umbral de significación. Nosotros seleccionamos el criterio de realizar la binarización empleando los llamados Coeficientes Importantes de la TIO. La relación binaria xRy significa, para los efectos de los cálculos presentados, “ x_j es influida por x_i ”, o sea es la transpuesta de la matriz de distribución.

La estimación de Coeficientes Importantes surgió en década de los cincuenta, para estimar actualizaciones de las matrices input-output. A través de esta metodología se busca focalizar los esfuerzos de captación de información técnica y otorgar mayor precisión a un conjunto de coeficientes de mayor significación estadística en una TIO.

La interpretación económica de ese conjunto de coeficientes estadísticamente significativos es un medio para identificar las características fundamentales de una economía representada en una TIO. Fidel Aroche (2002) ha impulsado esa línea de investigación, enfatizando que las relaciones directas e indirectas entre un par de ramas vinculadas por flujos de compras y ventas depende no sólo del tamaño de los coeficientes, sino también de su posición relativa en la TIO.

La estimación de los Coeficientes Importantes se obtiene como una elasticidad que relaciona un cambio en los coeficientes de insumo directo con los cambios que se producen en la matriz inversa de Leontief. Su estimación para la matriz de distribución es como sigue:

$$r_{ij} = 1/d_{ij}\pi_{ii}(x_i/x_j)$$

en donde r_{ij} = coeficientes importantes; d_{ij} = matriz de distribución; π_{ii} = inversa de $(I - D)$; x_i y x_j = valor de la producción.

Cuanto más pequeño es r_{ij} más importante es el coeficiente d_{ij} , ya que el sistema en su conjunto es más sensible a cambios en esa celda.

En este trabajo se presentan los resultados en base a la aplicación de un filtro $r_{ij} \leq 100$ para el modelo RESO y $r_{ij} \leq 20$ para el de clausuras de cerrados mínimos – CCM en lo sucesivo-. Esto se debe a que en el caso de RESO es mejor disponer de una red mas densa para localizar componentes conexas, ya que se evalúan ascendentes y descendentes de cada uno de los elementos del conjunto, mientras que en CCM, para el caso que nos ocupa, sólo se requiere la localización los descendentes de los conjuntos unitarios para obtener los conjuntos cerrados elementales y los cerrados mínimos.

3.3.- Aplicación de RESO.

La matriz binarizada de coeficientes importantes representa, en este caso, un conjunto que describe las relaciones interindustriales de la TIO Asturiana del año 2000 (ver Anexo 1). Para obtener las componentes conexas se puede operar una clausura a partir de la base de los entornos de las ramas, o bien se puede leer la misma matriz binaria como un dígrafo y evaluar los puntos aislados (pendientes), puntos frágiles y puntos de articulación, generando una estructuración de las relaciones del conjunto completo. Esta última vía es la que adopta RESO.

El algoritmo obtiene, para nuestro caso, una solución en 10 etapas:

Etapas 0

Localización de puntos aislados:

[pi] 1 6 7 25 26 27 28 29. Estos constituyen la Clase 0

Etapas 1

Evaluar CC [22 el] * 2 3 4 5 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 30

Localización de puntos frágiles

[pf] 8 18 22 Estos constituyen la Clase 1

Etapas 2

Evaluar CC [19 el] * 2 3 4 5 9 10 11 12 13 14 15 16 17 19 20 21 23 24 30

Localización de puntos frágiles

[pf] 2 5 Estos constituyen la Clase 2

Etapa 3

Evaluar CC [17 el] * 3 4 9 10 11 12 13 14 15 16 17 19 20 21 23 24 30

Localización de puntos de articulación

[pa] 11 20 24 Estos constituyen la Clase 3

Etapa 4

Localización de puntos aislados

[pi] 4 Este constituye la Clase 4

Etapa 5

Evaluar CC [13 el] * 3 9 10 12 13 14 15 16 17 19 21 23 30

Localización de puntos frágiles

[pf] 9 13 Estos constituyen la Clase 5

Etapa 6

Evaluar CC [11 el] * 3 10 12 14 15 16 17 19 21 23 30

Localización de puntos de articulación

[pa] 14 30 estos constituyen la clase 6

Etapa 7

Evaluar CC [9 el] * 3 10 12 15 16 17 19 21 23

Localización de puntos frágiles

[pf] 12 Este constituye la clase 7

Etapa 8

Evaluar CC [8 el] * 3 10 15 16 17 19 21 23

Localización de puntos de articulación

[pa] 23 Este constituye la clase 8

Etapa 9

Evaluar CC [7 el] * 3 10 15 16 17 19 21

Localización de puntos frágiles

[pf] 3 10 15 16 17 Estos constituyen la clase 9

Etapa 10

Evaluar CC [2 el] * 19 21

Localización de puntos de articulación

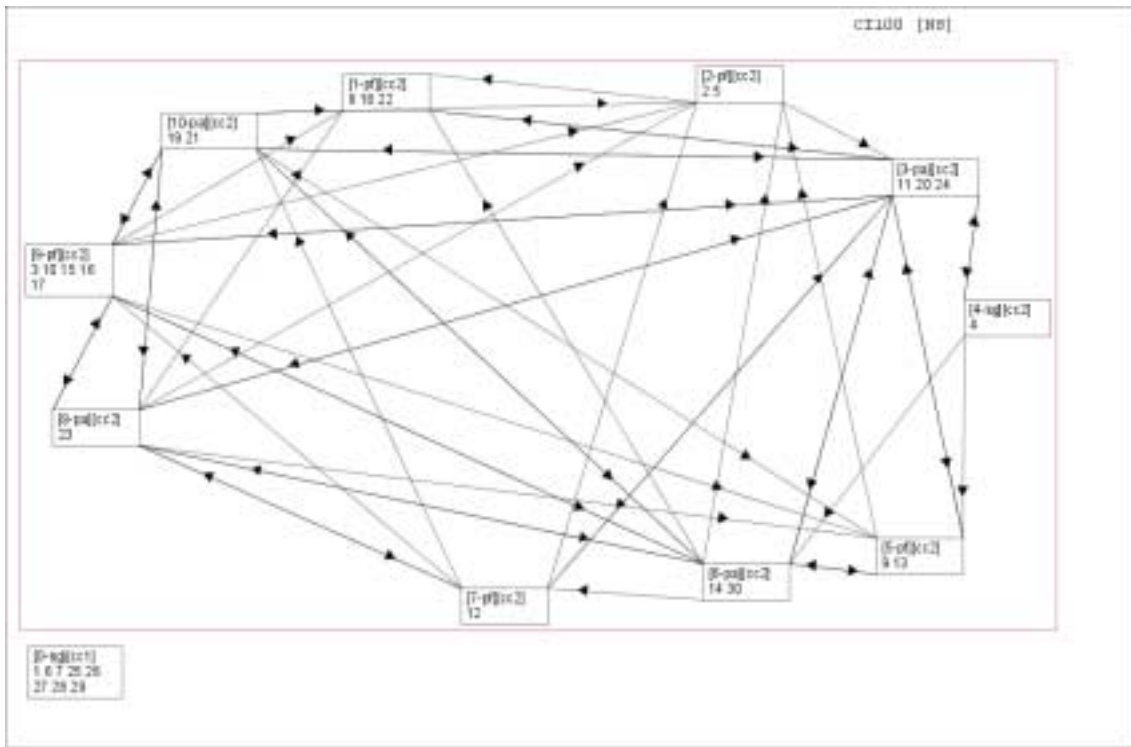
[pa] 19 21 Estos constituyen la clase 10

Las Componentes conexas son :

cc 1 * [1] * 1

cc 2 * [22] * 2 3 4 5 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 30
 cc 3 * [1] * 6
 cc 4 * [1] * 7
 cc 5 * [1] * 25
 cc 6 * [1] * 26
 cc 7 * [1] * 27
 cc 8 * [1] * 28
 cc 9 * [1] * 29

Esa estructuración se representa gráficamente como sigue:



Gráfica 1

3.4.- Aplicación de CCM

En este caso, la matriz binarizada de coeficientes importantes constituye una base de los preentornos de las ramas.

Las clausuras de los conjuntos unitarios se obtuvieron a través de la clausura transitiva del dígrafo (la inversa booleana de la matriz r_{ij} binarizada), obteniéndose los siguientes

Conjuntos Elementales :

$$Ft[1] = 1 \text{ Nil}$$

$$Ft[2] = 2 \text{ Nil}$$

$$Ft[3] = 3 \ 10 \ 14 \ 15 \ 16 \ 17 \ 18 \ 19 \ 20 \ 29 \ \text{Nil}$$

$$Ft[4] = 4 \ 13 \ 14 \ 15 \ 16 \ 17 \ 18 \ 20 \ 29 \ \text{Nil}$$

$$Ft[5] = 1 \ 5 \ 22 \ \text{Nil}$$

$$Ft[6] = 6 \ \text{Nil}$$

$$Ft[7] = 7 \ \text{Nil}$$

$$Ft[8] = 8 \ 18 \ \text{Nil}$$

$$Ft[9] = 9 \ \text{Nil}$$

$$Ft[10] = 10 \ 14 \ 15 \ 16 \ 17 \ 18 \ 19 \ 20 \ 29 \ \text{Nil}$$

$$Ft[11] = 11 \ 12 \ 29 \ \text{Nil}$$

$$Ft[12] = 12 \ \text{Nil}$$

$$Ft[13] = 13 \ 20 \ \text{Nil}$$

$$Ft[14] = 14 \ 15 \ 16 \ 17 \ 18 \ 20 \ 29 \ \text{Nil}$$

$$Ft[15] = 15 \ \text{Nil}$$

$$Ft[16] = 16 \ 29 \ \text{Nil}$$

$$Ft[17] = 17 \ \text{Nil}$$

$$Ft[18] = 18 \ \text{Nil}$$

$$Ft[19] = 19 \ \text{Nil}$$

$$Ft[20] = 20 \ \text{Nil}$$

$$Ft[21] = 8 \ 18 \ 21 \ 22 \ \text{Nil}$$

$$Ft[22] = 22 \ \text{Nil}$$

$$Ft[23] = 14 \ 15 \ 16 \ 17 \ 18 \ 20 \ 23 \ 24 \ 29 \ \text{Nil}$$

$$Ft[24] = 24 \ \text{Nil}$$

$$Ft[25] = 25 \ \text{Nil}$$

$$Ft[26] = 26 \ \text{Nil}$$

$$Ft[27] = 27 \ \text{Nil}$$

$$Ft[28] = 28 \ 29 \ \text{Nil}$$

$$Ft[29] = 29 \ \text{Nil}$$

$$Ft[30] = 8 \ 18 \ 20 \ 21 \ 22 \ 24 \ 25 \ 26 \ 28 \ 29 \ 30 \ \text{Nil}$$

Los Conjuntos Elementales Mínicos, obtenidos por inclusión en los conjuntos elementales, son los siguientes:

Fm[1] (1) = 1 Nil
 Fm[2] (2) = 2 Nil
 Fm[3] (6) = 6 Nil
 Fm[4] (7) = 7 Nil
 Fm[5] (9) = 9 Nil
 Fm[6] (12) = 12 Nil
 Fm[7] (15) = 15 Nil
 Fm[8] (17) = 17 Nil
 Fm[9] (18) = 18 Nil
 Fm[10] (19) = 19 Nil
 Fm[11] (20) = 20 Nil
 Fm[12] (22) = 22 Nil
 Fm[13] (24) = 24 Nil
 Fm[14] (25) = 25 Nil
 Fm[15] (26) = 26 Nil
 Fm[16] (27) = 27 Nil
 Fm [17] (29) = 29 Nil

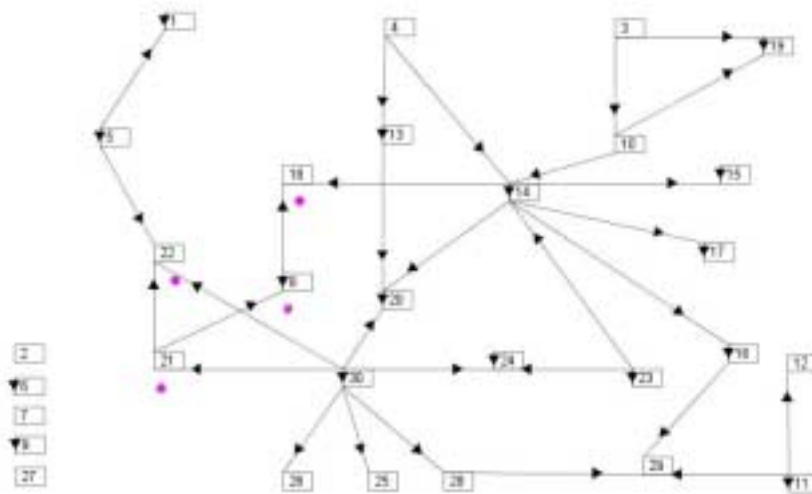
Fase de Estructuración.

A partir de los conjuntos elementales mínimos se sobreponen sucesivamente los conjuntos más pequeños que los contienen. Por ejemplo el conjunto elemental mínimo no.18 (rama 18) está contenido en el conjunto elemental no. 8 (ramas no.8, 18), que a su vez está contenido en el conjunto elemental no. 21 (ramas 8, 18, 21, 22):



Gráfica 2

Con esta representación la figura completa de todas las relaciones descritas por los conjuntos elementales y elementales mínimos es muy complicada, de manera que para poderla representar realizamos la siguiente gráfica:



Gráfica 3

Obsérvese que las ramas 1 12 15 18 19 20 22 24 25 y 26 sólo reciben influencias y no transmiten ninguna, en tanto que las ramas 2 6 7 y 27 están aisladas; ambos tipos de ramas constituyen conjuntos cerrados elementales mínimos.

4.- RESULTADOS.

Los subconjuntos más importantes derivados del algoritmo RESO, generados en los “puntos de articulación” son:

Clase 3: 11. Industria química, 20. Construcción, 24. Intermediación financiera;

Clase 6: 14. Metalurgia y productos metálicos, 30. Otros servicios;

Clase 8: 23. Transportes y comunicaciones;

Clase 10: 19. Energía eléctrica, gas y agua, 21. Comercio y reparación.

Los subconjuntos más importantes (juzgando por los cardinales de las clausuras) derivados de CCM son:

3. Extracción de productos energéticos,

4. Extracción de otros minerales,

- 10. Coquerías y refino de petróleo,
- 14. Metalurgia y productos metálicos,
- 23. Transportes y comunicaciones
- 30. Otros servicios.

Combinando los resultados de ambos modelos, se observa que los sectores más importantes para la economía Asturiana son los de Metalurgia y productos metálicos (14), Otros servicios (30) y Transportes y comunicaciones (23).

El modelo CCM refleja correctamente la importancia cuantitativa que tienen las industrias extractivas, coquerías y refino de petróleo, que en la última década han declinado. En ese sentido RESO clasifica esas mismas ramas, como puntos frágiles (ver la clase 9). Otra característica interesante de los resultados de RESO es que permite ver la importancia creciente que tienen las actividades de la industria química, construcción y actividades financieras.

5.- CONCLUSIONES.

Las herramientas aquí presentadas muestran que la pretopología unifica los desarrollos teóricos de la topología y la teoría de gráficas en un marco conceptual que simplifica el trabajo empírico en el caso de conjuntos finitos.

Los operadores de clausuras empleados requieren una definición precisa de los tipos de relaciones que se establecen entre los miembros de los conjuntos estudiados, así como de la naturaleza de los espacios en que esas relaciones interactúan, haciendo muy directa la interpretación de resultados prácticos.

Los algoritmos aplicados enfatizan la importancia de las posiciones relativas entre las ramas económicas, más allá del valor de las compras y ventas que se realizan entre ellas, dando un lugar preponderante al contexto del conjunto en el que esas transacciones tienen lugar. Ese es el caso, por ejemplo, en la clasificación que se obtiene al evaluar los “puntos frágiles” y “puntos de articulación” en la red descrita por la TIO, o en la obtención de sus conjuntos mínimos elementales. Esa misma lógica posicional es la que se aplicó al filtrar la TIO a través de los “Coeficientes Importantes”, lo que contrasta notablemente con el uso de filtros basados únicamente en el tamaño de los coeficientes de insumo o de distribución.

En la medida en que la circularidad del proceso de reproducción económica se describa en modelos input-output extendidos o mediante la confección de matrices de contabilidad social, es de esperarse que las componentes conexas aumenten, haciendo más valiosas estas herramientas del análisis estructural.

La profundización del enfoque pretopológico también es capaz de unificar las generalizaciones de la teoría de gráficas, hipergrafos y multigrafos, que se dan a través de matroides o del abandono de las propiedades de las distancias que se dan en espacios métricos, dando paso a espacios cuasi-pseudométricos (en los que la propiedad de la desigualdad triangular de las distancias no se cumple), abriendo nuevos horizontes al análisis regional, así como la incrustación de modelos de input-output en modelos de redes sociales mas amplias.

6.- REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

AROCHE-REYES, F. (2002): Structural Transformations and Important Coefficients in the North American Economies. *Economic Systems Research*. Vol. 14, nº 3, pp. 257-273.

AURAY, J. P., LAMURE, M., DURU, G. Y NICOLAYANNIS, N. (2004): La prétopologie: un outil mathématique de proximité dans le domaine des sciences sociales. *Quatrèmes Journées de la proximité*.

BELMANDT, Z. (1993): *Manuel de prétopologie et ses applications*. Ed. Hermes.

BERGE, C. (1985): *Graphs*. Ed. North Holland..

BLANCAS, A. SOLIS ARIAS V. (2003): A pretopological Analysis of the Mexican Financial System through a Social Accounting Matrix for an Eighteen Sector Economy. Seminario Europeo- Latinoamericano de Economía Matemática. CIMAT, Guanajuato México.

BONNEVAY, S., LAMURE, M., LARGERON, C. Y NICOLAYANNIS N. (1999): A pretopological approach for structuring data in non-metric spaces. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*. Vol. 2, pp. 1-8.

DALUD-VINCENT, M. (1994): *Modèle prétopologique pour une méthodologie d'analyse de réseaux: concepts et algorithmes*. Tesis doctoral. Universidad de Lyon.

DALUD-VINCENT, M., FORSÉ M. Y AURAY, J.P. (1994): An algorithm for finding the structure of social groups. *Social Networks*. Nº 16, pp. 137-162.

- DALUD-VINCENT, M. (1998): Modélisation prétopologique de la notion de reseau: un outil pour l'étude de la proximité en sociologie. En M. Belet, T. Kirat y C. LARGERON *Approches multifomeres de la proximité*. Capítulo 7. Ed. Hermes
- DALUD-VINCENT, M., BRISSAUD, M. Y LAMURE, M. (2001): Pretopologie as an extension of graph theory: the case of strong connectivity. *International Journal of Applied Mathematics*. Vol. 5, n° 4, pp. 455-472.
- GARCÍA MUÑIZ, A. S., MORILLAS RAYA, A. Y RAMOS CARVAJAL, C. (2003): Evolución sectorial de la red económica asturiana. *XXIX Reunión de Estudios Regionales*. Santander.
- GARCÍA PÉREZ, M. E. (1999): *Estructuras pretopológicas versus grafos de transferencia: una aplicación al análisis de las relaciones de interdependencia de la economía española*. Tesis doctoral. Disponible en [http:// www.umi.com](http://www.umi.com).
- KELLEY, J. L. (1975): *Topología general*. Ed. Universitaria de Buenos Aires.
- KURATOWSKI, C. (1952): *Topologie*. Varsovia.
- [http:// java.com/es/download/manual.jsp](http://java.com/es/download/manual.jsp)
- [http:// lass.uni-lyon1.fr/softs/index.html](http://lass.uni-lyon1.fr/softs/index.html)
- [http://nte-socio.univ-lyon2.fr/Monique Dalud-Vincent](http://nte-socio.univ-lyon2.fr/Monique_Dalud-Vincent)
- <http://www.sadei.es>
- LARGERON, C. Y BONNEVAY, S. (1999): Une approche pretopologique pour la structuration. *Centre de recherches économiques de L'Université de Saint-Étienne*. N° 1999-7, pp. 1-18.
- LARGERON, C. Y BONNEVAY, S. (2002): A pretopological approach for structural analysis. *Information Sciences*. N° 144, pp. 169-185.
- RAMOS, C., FERNÁNDEZ, E. Y ÁLVAREZ, R. (2003): El problema de la agregación sectorial en el marco input-ouput. *XXIX Reunión de Estudios Regionales*, Santander.
- SOLÍS ARIAS, V. (2001): Análisis of the Mexican Financial System through a Pretopological Approach: a Social Accounting Matrix for One Sector Economy. Facultad de Economía UNAM, México.

Anexo 1

Ramas	TIOAS-31
1- Agricultura, ganadería y silvicultura	1+2
2-Pesca	3
3-Extracción de productos energéticos	4+5+6
4-Extracción de otros minerales	7+8
5-Alimentación, bebidas y tabaco	9+10+11+12+13
6-Industria textil y de confección	14+15
7 -Industria del cuero y del calzado	16
8-Industria de la madera y corcho	17
9-Industria de la edición, papel y artes gráficas	18+19
10-Coquerías y refino de petróleo	20
11-Industria química	21
12-Industria del caucho y materias plásticas	22
13-Otros productos minerales no metálicos	23
14-Metalurgia y productos metálicos	24+25
15- Maauinaria y equipo mecánico	26
16- Material eléctrico, electrónico óptico	27+28+29+30
17- Fabricación de material de transporte	31+32
18-Industrias manufactureras diversas	33+34
19-Eneraía eléctrica, gas yagua	35+36
20-Construcción	37
21-Comercio y reparación	38+39+40
22-Hostelería	41
23- Transportes v comunicaciones	42+43+44+45+46
24-Intermediación financiera	47+47 bis+48+49
25-Administración pública	55
26-Educación de mercado	56
27 -Educación de no mercado	58
28-Actividades sanitarias; servicios sociales de mercado	57
29- Actividades sanitarias; servicios sociales de no mercado	59
30-Otros servicios	50+51+52+53+54+60+61+62+63
31-HoQares aue emplean personal doméstico	64